

CORRIGÉ — FICHE D'EXERCICES

Chapitre 3 — Le second degré
Première spécialité mathématiques

I — Forme canonique

Exercice 01 — Lire, écrire et développer une forme canonique

1) On compare à $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

a) $f : a = 1, \alpha = 3$ et $\beta = 5$.

b) $g(x) = (x - (-2))^2 + (-7) : a = 1, \alpha = -2$ et $\beta = -7$.

c) $h(x) = 2(x - (-1))^2 + 4 : a = 2, \alpha = -1$ et $\beta = 4$.

d) $k : a = -3, \alpha = 4$ et $\beta = -1$.

e) $m(x) = (x - (-5))^2 + 0 : a = 1, \alpha = -5$ et $\beta = 0$.

f) $n(x) = -(x - 0)^2 + 6 : a = -1, \alpha = 0$ et $\beta = 6$.

2) a) $P(x) = (x - 2)^2 - 3$

b) $P(x) = -2(x + 1)^2 + 5 \quad (x - (-1) = x + 1)$

c) $P(x) = 3(x - 4)^2$

d) $P(x) = 5x^2 - 1 \quad ((x - 0)^2 = x^2)$

3) On développe le carré, puis on multiplie par a .

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 + 5$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - 7$$

$$g(x) = x^2 + 4x - 3$$

$$h(x) = 2(x^2 + 2x + 1) + 4$$

$$h(x) = 2x^2 + 4x + 6$$

$$k(x) = -3(x^2 - 8x + 16) - 1$$

$$k(x) = -3x^2 + 24x - 49$$

 $\rightarrow \alpha$ est le nombre retranché à x : dans $(x + 2)$, $\alpha = -2$.Exercice 02 — Compléter un carré ($a = 1$) $x^2 + kx$ est le début de $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + kx + \frac{k^2}{4}$: on retire ensuite $\frac{k^2}{4}$.

A = $x^2 + 8x - 3 = (x + 4)^2 - 16 - 3 = (x + 4)^2 - 19$

B = $x^2 - 6x + 2 = (x - 3)^2 - 9 + 2 = (x - 3)^2 - 7$

C = $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

D = $x^2 + 5x + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{8}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

E = $x^2 - 12x + 35 = (x - 6)^2 - 36 + 35 = (x - 6)^2 - 1$

F = $x^2 - 9x = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$

 $\rightarrow$ Dans la parenthèse : la moitié du coefficient de x , avec son signe.

Exercice 03 — Compléter un carré ($a \neq 1$)

On met a en facteur dans les deux premiers termes, puis on complète le carré.

$$A = 2x^2 + 8x + 3$$

$$A = 2(x^2 + 4x) + 3$$

$$A = 2[(x + 2)^2 - 4] + 3$$

$$A = 2(x + 2)^2 - 8 + 3$$

$$A = 2(x + 2)^2 - 5$$

$$B = -x^2 + 3x + 2$$

$$B = -(x^2 - 3x) + 2$$

$$B = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 2$$

$$B = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

$$C = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x - 1)^2 \quad (\beta = 0)$$

$$D = -x^2 + 5x - 4$$

$$D = -(x^2 - 5x) - 4$$

$$D = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] - 4$$

$$D = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$E = 2x^2 + 2x - 1$$

$$E = 2(x^2 + x) - 1$$

$$E = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - 1$$

$$E = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$F = -2x^2 + 8x - 5$$

$$F = -2(x^2 - 4x) - 5$$

$$F = -2[(x - 2)^2 - 4] - 5$$

$$F = -2(x - 2)^2 + 3$$

→ Erreur fréquente : oublier de multiplier par a le terme retiré. En A , $2 \times (-4) = -8$, et non -4 .

II — Calcul de α et β , factorisation**Exercice 04 — Forme canonique par α et β**

$$1) \alpha = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$\beta = P(3) = 9 - 18 + 1$$

$$\beta = -8$$

$$\text{donc } P(x) = (x - 3)^2 - 8.$$

$$\text{Vérification : } (x - 3)^2 - 8 = x^2 - 6x + 9 - 8, \text{ soit } x^2 - 6x + 1.$$

$$2) \alpha = -\frac{6}{6} = -1$$

$$\beta = Q(-1) = 3 - 6 - 2$$

$$\beta = -5$$

$$\text{donc } Q(x) = 3(x+1)^2 - 5.$$

$$\text{Vérification : } 3(x^2 + 2x + 1) - 5 = 3x^2 + 6x - 2.$$

$$3) \alpha = -\frac{-4}{-2} = -2$$

$$\beta = R(-2) = -4 + 8 - 9$$

$$\beta = -5$$

$$\text{donc } R(x) = -(x+2)^2 - 5.$$

$$\text{Vérification : } -(x^2 + 4x + 4) - 5 = -x^2 - 4x - 9.$$

→ Devant le carré, on écrit toujours $a : 3$ en 2), -1 en 3).

Exercice 05 — De la forme canonique à la factorisation

$$A = x^2 - 4x - 5 : \alpha = 2 \text{ et } \beta = 4 - 8 - 5 = -9.$$

$$A = (x - 2)^2 - 9$$

$$A = (x - 2)^2 - 3^2$$

$$A = (x - 2 - 3)(x - 2 + 3)$$

$$A = (x - 5)(x + 1)$$

$$B = x^2 + 4x + 7 : \alpha = -2 \text{ et } \beta = 4 - 8 + 7 = 3, \text{ donc } B = (x + 2)^2 + 3. \text{ Un carré est positif, donc } (x + 2)^2 + 3 \geq 3 > 0 : \text{ le trinôme ne s'annule jamais, il ne se factorise pas.}$$

$$C = 2x^2 + x - 3 : \alpha = -\frac{1}{4} \text{ et } \beta = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8}.$$

$$C = 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{25}{8}$$

$$C = 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{5}{4} \right)^2 \right]$$

$$C = 2 \left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right) \left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \right)$$

$$C = 2(x - 1) \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

$$C = (x - 1)(2x + 3)$$

$$D = -x^2 - 2x - 3 : \alpha = -\frac{-2}{-2} = -1 \text{ et } \beta = -1 + 2 - 3 = -2, \text{ donc } D = -(x + 1)^2 - 2. \text{ Comme } -(x + 1)^2 \leq 0, \text{ on a } D \leq -2 < 0 : \text{ pas de factorisation.}$$

→ En C, on met d'abord 2 en facteur dans la forme canonique : $-\frac{25}{8} = 2 \times \left(-\frac{25}{16}\right)$, et $\frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$.

Exercice 06 — Trois formes d'un même trinôme

$$1) \alpha = -\frac{-12}{4} = 3$$

$$\beta = f(3) = 18 - 36 + 10$$

$$\beta = -8$$

$$\text{donc } f(x) = 2(x - 3)^2 - 8.$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad f(x) &= 2[(x-3)^2 - 2^2] \\
 f(x) &= 2(x-3-2)(x-3+2) \\
 f(x) &= 2(x-5)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad f(x) &= 2(x^2 - x - 5x + 5) \\
 f(x) &= 2(x^2 - 6x + 5) \\
 f(x) &= 2x^2 - 12x + 10
 \end{aligned}$$

On retrouve la forme développée.

4) Forme développée : $f(0) = 10$. Forme canonique : $f(3) = -8$ (le carré est nul). Forme factorisée : $f(1) = 0$ (un facteur est nul).

→ Chaque forme a son usage : la développée pour $f(0)$, la canonique pour $f(\alpha)$, la factorisée pour les racines.

III — Équations du second degré

Exercice 07 — Factoriser plutôt que calculer Δ

$$\begin{aligned}
 1) \quad 9x^2 - 4 &= (3x-2)(3x+2) : S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\} \\
 2) \quad x^2 - 6x &= x(x-6) : S = \{0; 6\} \\
 3) \quad 2x^2 - 18 &= 2(x-3)(x+3) : S = \{-3; 3\} \\
 4) \quad x^2 - 5 &= (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) : S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\} \\
 5) \quad 3x - 2 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 &: S = \left\{-5; \frac{2}{3}\right\} \\
 6) \quad x^2 - 10x + 25 &= (x-5)^2 : S = \{5\}
 \end{aligned}$$

→ Facteur commun, identité remarquable, produit déjà factorisé : calculer Δ ferait perdre du temps.

Exercice 08 — Avec le discriminant

$$\begin{aligned}
 1) \quad \Delta &= 1 + 48 = 49 > 0 : x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3. \quad S = \{-4; 3\} \\
 2) \quad \Delta &= 9 - 20 = -11 < 0 : S = \emptyset \\
 3) \quad \Delta &= 36 - 36 = 0 : \text{racine double } x_0 = -\frac{6}{2 \times (-1)} = 3. \quad S = \{3\} \\
 4) \quad \Delta &= 16 + 84 = 100 : t = \frac{4 \pm 10}{2}. \quad S = \{-3; 7\} \\
 5) \text{ On ordonne : } -3y^2 - y + 2 &= 0, \text{ donc } a = -3, b = -1 \text{ et } c = 2. \Delta = 1 + 24 = 25 : y = \frac{1 \pm 5}{-6}. \\
 S &= \left\{-1; \frac{2}{3}\right\} \\
 6) \quad \Delta &= 25 + 8 = 33 > 0 : x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{-4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}. \quad S = \left\{\frac{5-\sqrt{33}}{4}; \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right\}
 \end{aligned}$$

→ En 3), le trinôme vaut $-(x-3)^2$. En 5), on range l'équation dans l'ordre $ay^2 + by + c$ avant de lire a, b, c : l'erreur de signe est fréquente.

Exercice 09 — Des racines carrées dans les coefficients

$$\begin{aligned}
 1) \quad \Delta &= (-2\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times (-4) \\
 \Delta &= 20 + 16 \\
 \Delta &= 36 = 6^2 \\
 x &= \frac{2\sqrt{5} \pm 6}{2} = \sqrt{5} \pm 3. \quad S = \{\sqrt{5} - 3; \sqrt{5} + 3\}
 \end{aligned}$$

$$2) \Delta = 16 - 4\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$t = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}}, \text{ soit } \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ et } \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3} \right\}$$

$$3) \Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}$$

$$\Delta = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2}$$

$$\Delta = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{2} \pm (\sqrt{2} - 1)}{2}. S = \{1; \sqrt{2}\}$$

$$4) -x^2 + 4x - 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 = -4 < 0. S = \emptyset$$

$$5) x^3 + 2x^2 - 15x = x(x^2 + 2x - 15) : x = 0, \text{ ou } x^2 + 2x - 15 = 0 (\Delta = 64, \text{ racines } 3 \text{ et } -5). \\ S = \{-5; 0; 3\}$$

$$6) (3x + 2)^2 \geq 0, \text{ donc } (3x + 2)^2 + 1 \geq 1 > 0. S = \emptyset$$

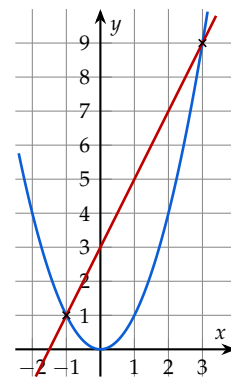
→ En 3), plus rapide : 1 est racine, car $1 - (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$; le produit des racines vaut $\sqrt{2}$ (partie V). En 5) et 6), pas de discriminant sur l'expression entière : on factorise, ou on raisonne sur le signe.

Exercice 10 — Une parabole et une droite

1) Voir la figure.

2) $x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x^2 = 2x + 3$: les solutions sont les abscisses des points communs à la parabole et à la droite. Il y en a deux; on lit -1 et 3.

3) $\Delta = 4 + 12 = 16$, donc $x = \frac{2 \pm 4}{2}$. $S = \{-1; 3\}$
On vérifie : $(-1)^2 = 1 = 2 \times (-1) + 3$ et $3^2 = 9 = 2 \times 3 + 3$.



Exercice 11 — Un programme Python

1) d est le discriminant Δ . Si $d < 0$, la fonction renvoie une liste vide (aucune solution); si $d == 0$, la seule racine $-\frac{b}{2a}$; sinon, les deux racines.

2) On retrouve l'exercice 8 : $[-4.0, 3.0]$; $[]$; $[3.0]$; $[-3.0, 7.0]$; avec $(-3; -1; 2)$: $[0.666\dots, -1.0]$; avec $(-2; 5; 1)$: $[2.686\dots, -0.186\dots]$, valeurs approchées de $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ et de $\frac{5-\sqrt{33}}{4}$.

3) Ici $\Delta = 9 > 0$ et le programme divise par $2a = 0$: **erreur de division par zéro**. Avec $a = 0$, l'équation n'est pas du second degré et les formules ne s'appliquent pas. Pourtant $3x - 12 = 0 \iff x = 4$.

4) `racines(1, 6, 9)` renvoie $[-3.0]$: $\Delta = 0$ exactement. Pour $0,2(x+3)^2$ on attendait aussi -3, mais le programme renvoie $[]$: les nombres à virgule sont enregistrés en valeur approchée, d vaut environ $-2,2 \times 10^{-16}$ au lieu de 0, et le test $d < 0$ est vrai.

→ Le résultat exact peut dépendre de la machine; l'essentiel est de comprendre qu'un test d'égalité sur des nombres à virgule calculés est fragile.

IV — Factorisation du trinôme

Exercice 12 — Factoriser un trinôme

- 1) $\Delta = 9 + 40 = 49$, racines $\frac{-3 \pm 7}{2}$, soit 2 et -5 : $f(x) = (x - 2)(x + 5)$
- 2) $\Delta = 100 - 36 = 64$, racines $\frac{10 \pm 8}{6}$, soit 3 et $\frac{1}{3}$: $g(x) = 3(x - 3)(x - \frac{1}{3}) = (x - 3)(3x - 1)$
- 3) $\Delta = 9 + 40 = 49$, racines $\frac{-3 \pm 7}{-4}$, soit -1 et $\frac{5}{2}$: $h(x) = -2(x + 1)(x - \frac{5}{2}) = -(x + 1)(2x - 5)$
- 4) 3 est racine évidente ($-3 + 1 + 2 = 0$). On met $a = -\frac{1}{3}$ en facteur : $k(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - x - 6)$, donc $S = 1$ et l'autre racine est $1 - 3 = -2$: $k(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)(x + 2)$

→ On n'oublie pas le facteur a ; contrôle par le terme constant : en 3), $-2 \times (-1) \times \frac{5}{2} = 5$.

Exercice 13 — Factoriser, ou prouver que c'est impossible

- A : $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: ne se factorise pas.
- B : Identité remarquable : $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
- C : $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $\frac{5 \pm 1}{6}$, soit 1 et $\frac{2}{3}$: $3(x - 1)(x - \frac{2}{3}) = (x - 1)(3x - 2)$
- D : $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$: ne se factorise pas.
- E : Identité remarquable : $9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$
- F : -1 est racine évidente ($2 - 3 + 1 = 0$); $S = -\frac{3}{2}$, donc l'autre racine est $-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$: $2(x + 1)(x + \frac{1}{2}) = (x + 1)(2x + 1)$

Exercice 14 — Simplifier un quotient

- 1) $x + 3 = 0 \iff x = -3$: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Le numérateur a pour racines 2 (racine évidente) et $-1 - 2 = -3$: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Pour $x \neq -3$: $A(x) = \frac{(x - 2)(x + 3)}{x + 3} = x - 2$.
- 2) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Le numérateur a pour racines -1 (racine évidente) et $-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$: $3x^2 + x - 2 = 3(x + 1)(x - \frac{2}{3}) = (x + 1)(3x - 2)$. Pour $x \in D$: $B(x) = \frac{(x + 1)(3x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3x - 2}{x - 1}$.

→ L'égalité simplifiée n'est vraie que sur D : en 1), $A(-3)$ n'existe pas, alors que $x - 2$ vaut -5 en -3 .

V — Somme et produit des racines

Exercice 15 — Une racine connue (1)

- 1) $(-2)^2 + 5 \times (-2) + 6$ vaut $4 - 10 + 6 = 0$: -2 est solution.
- 2) $a = 1$, donc $x^2 + 5x + 6 = x^2 - Sx + P$: $S = -5$ et $P = 6$.
- 3) L'autre solution est $S - (-2) = -5 + 2 = -3$; contrôle : $(-2) \times (-3) = 6 = P$.

Exercice 16 — Une racine connue (2)

- 1) $3^2 - 7 \times 3 + 12$ vaut $9 - 21 + 12 = 0$: 3 est solution.
- 2) $S = 7$ et $P = 12$.
- 3) L'autre solution est $7 - 3 = 4$; contrôle : $3 \times 4 = 12$.

Exercice 17 — Racine évidente, puis somme

- 1) $1 - 6 + 5 = 0 : x_1 = 1 ; S = 6$, donc $x_2 = 5$.
- 2) $4 + 1 - 5 = 0 : x_1 = 1 ; S = -\frac{1}{4}$, donc $x_2 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$.
- 3) $7 - 9 + 2 = 0 : x_1 = 1 ; S = \frac{9}{7}$, donc $x_2 = \frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7}$.
- 4) $3 - 8 + 5 = 0$ en $x = -1 : x_1 = -1 ; S = -\frac{8}{3}$, donc $x_2 = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3}$.

→ Si $a + b + c = 0$, alors 1 est racine ; si $a - b + c = 0$, c'est -1.

Exercice 18 — Sans discriminant

- 1) $x_1 = 1$ ($1 - 10 + 9 = 0$), $S = 10 : S = \{1; 9\}$
- 2) $x_1 = -1$ ($-2 - 3 + 5 = 0$), $S = -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, donc $x_2 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} : S = \{-1; \frac{5}{2}\}$
- 3) $x_1 = 2$ ($4 + 8 - 12 = 0$), $S = -4 : S = \{-6; 2\}$
- 4) $x_1 = -1$ ($1 - 7 + 6 = 0$), $S = -7 : S = \{-6; -1\}$
- 5) $x_1 = 3$ ($9 - 27 + 18 = 0$), $S = 9 : S = \{3; 6\}$
- 6) $x_1 = \sqrt{2}$ ($2 + 2 - 4 = 0$), $S = -\sqrt{2}$, donc $x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} : S = \{-2\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

→ En 6), le $\sqrt{2}$ de l'équation invite à essayer $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Contrôle par le produit : $\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = -4 = \frac{c}{a}$.

Exercice 19 — Calculer sans résoudre

- 1) $\Delta = 81 - 32 = 49 > 0$: il y a bien deux racines. $S = -\frac{b}{a} = \frac{9}{2}$ et $P = \frac{c}{a} = 2$.

$$2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9}{4}$$

- 3) $S^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, donc :

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{81}{4} - \frac{16}{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{65}{4}$$

→ Contrôle : les racines sont $\frac{1}{2}$ et 4 ; $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ et $\frac{1}{4} + 16 = \frac{65}{4}$.

Exercice 20 — Signe des racines

On vérifie d'abord que $\Delta > 0$. Si $P < 0$, les racines sont de signes contraires ; si $P > 0$, elles ont le même signe, celui de S .

- 1) $\Delta = 81 - 56 = 25 > 0$; $P = 14 > 0$ et $S = 9 > 0$: **deux racines positives** (2 et 7).
- 2) $\Delta = 4 + 60 = 64 > 0$; $P = -15 < 0$: **deux racines de signes contraires** (-5 et 3).
- 3) $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$; $P = \frac{3}{3} = 1 > 0$ et $S = -\frac{10}{3} < 0$: **deux racines négatives** (-3 et $-\frac{1}{3}$).

VI — Signe du trinôme et inéquations

Exercice 21 — Tableau de signes

A : Racines 2 et 4 ($4 - 12 + 8 = 0$, $S = 6$), $a = 1 > 0$:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 8$	+	0	-	0	+

B : $-3x^2 + 9x - 6 = -3(x^2 - 3x + 2)$: racines 1 et 2, $a = -3 < 0$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$-3x^2 + 9x - 6$	-	0	+	0	-

C : $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$: toujours du signe de $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 6$	+	+

D : $-x^2 - 4x - 4 = -(x + 2)^2$: $\Delta = 0$, racine double -2 , $a < 0$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-x^2 - 4x - 4$	-	0	-

Exercice 22 — Inéquations du second degré

- $\Delta = 49 - 40 = 9$, racines $\frac{7 \pm 3}{2}$, soit 2 et 5 ; $a > 0$: positif à l'extérieur. $S =]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[$
- Racines 4 (racine évidente) et $-2 - 4 = -6$; $a > 0$: négatif entre les racines. $S =]-6; 4[$
- $\Delta = 1 + 120 = 121$, racines $\frac{1 \pm 11}{2}$, soit -5 et 6 ; $a > 0$: $S = [-5; 6]$ (crochets fermés : $\leq$).
- $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$: le trinôme est toujours strictement positif. $S = \emptyset$
- $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$, strictement positif sauf en 3 : $S = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $\Delta = 4 + 24 = 28$ et $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$: racines $\frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{-6}$, soit $\frac{1 - \sqrt{7}}{3}$ et $\frac{1 + \sqrt{7}}{3}$; $a = -3 < 0$: positif entre les racines. $S = \left] \frac{1 - \sqrt{7}}{3} ; \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right[$

→ En 4) et 5), on ne conclut pas trop vite « pas de racine, donc pas de solution » : c'est le signe de a qui décide.

Exercice 23 — Position d'une parabole et d'une droite

- $f(x) = 4x + 2 \iff x^2 + 2x + 3 - 4x - 2 = 0$
 $\iff x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\iff (x - 1)^2 = 0$

Un seul point commun, d'abscisse 1 et d'ordonnée $4 \times 1 + 2 = 6$.

- $f(x) - (4x + 2) = (x - 1)^2$: positif ou nul, nul seulement en 1.
- $f(x) \geq 4x + 2$ pour tout réel x : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}_g$; elles se touchent au point $(1; 6)$.

→ La droite est tangente à la parabole en $(1; 6)$: c'est le cas $\Delta = 0$.

VII — Représentation graphique

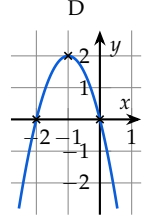
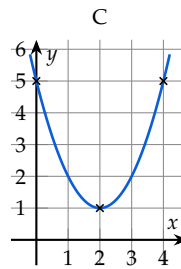
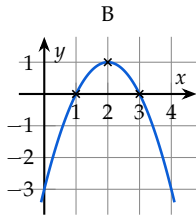
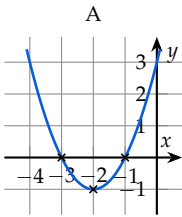
Exercice 24 — Sommet, racines, allure

A : $a = 1 > 0$: vers le haut. $\alpha = -2$ et $\beta = 4 - 8 + 3 = -1$: $S(-2; -1)$. $\Delta = 4$: racines -3 et -1 .

B : $a = -1 < 0$: vers le bas. $\alpha = -\frac{4}{-2} = 2$ et $\beta = -4 + 8 - 3 = 1$: $S(2; 1)$. $\Delta = 4$: racines 1 et 3 .

C : $a = 1 > 0$: vers le haut. $\alpha = 2$ et $\beta = 4 - 8 + 5 = 1$: $S(2; 1)$. $\Delta = -4 < 0$: aucune racine.

D : $a = -2 < 0$: vers le bas. $\alpha = -\frac{-4}{-4} = -1$ et $\beta = -2 + 4 = 2$: $S(-1; 2)$.
 $-2x^2 - 4x = -2x(x + 2)$: racines -2 et 0 .



→ En C, sans racine, on place le sommet, puis $(0; 5)$ et son symétrique $(4; 5)$ par rapport à la droite $x = 2$.

Exercice 25 — Utiliser la symétrie

1) $\alpha = \frac{6}{2} = 3$

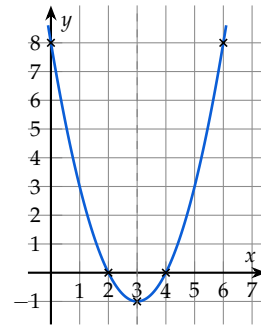
$\beta = f(3) = 9 - 18 + 8$

$\beta = -1$

2 est racine évidente ($4 - 12 + 8 = 0$) et $S = 6$: racines 2 et 4 .

2) $f(0) = 8$. Le symétrique de $(0; 8)$ par rapport à la droite $x = 3$ a pour abscisse $3 + 3 = 6$: c'est $(6; 8)$; en effet $f(6) = 36 - 36 + 8 = 8$.

3) Voir la figure : $S(3; -1)$, $(2; 0)$, $(4; 0)$, $(0; 8)$ et $(6; 8)$.



Exercice 26 — Retrouver un trinôme

1) $\frac{-1+3}{2} = 1$: l'abscisse du sommet est bien le milieu des racines.

2) Le sommet est sur la parabole : $a(1 + 1)(1 - 3) = -8$, soit $-4a = -8$, donc $a = 2$.

3) $2(x + 1)(x - 3) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$; contrôle : $2 - 4 - 6 = -8$.

Exercice 27 — Le jet d'une fontaine

1) La parabole coupe l'axe des abscisses en 1 et en 5 : $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$. Le jet sort du bassin à 1 m de l'origine et y retombe à 5 m.

2) Le sommet est le point $(3; 2)$: $\alpha = 3$ et $\beta = 2$. β est la hauteur maximale du jet, 2 m.

3) $\frac{1+5}{2} = 3 = \alpha$.

4) La parabole est tournée vers le bas (le trinôme a un maximum) : a est strictement négatif.

→ On lit les racines sur l'axe des abscisses, le sommet au point le plus haut ; le sens de la parabole donne le signe de a .

Exercice 28 — À chaque parabole sa fonction

On utilise le signe de a (orientation), celui de Δ (nombre de points sur l'axe des abscisses), le point $(0; c)$ et le sommet.

- $f_1 : a < 0$ et $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: vers le bas, entièrement sous l'axe, sommet $(-1; -1)$: c'est $\mathcal{C}_3$.
- $f_2 : a > 0$ et $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: vers le haut, entièrement au-dessus de l'axe, sommet $(1; 1)$: c'est $\mathcal{C}_2$.
- $f_3 : a > 0$ et $\Delta = 25 - 16 = 9$: vers le haut, coupe l'axe en -2 et $-\frac{1}{2}$: c'est $\mathcal{C}_5$.
- $f_4 : a < 0$ et $\Delta = 9 + 16 = 25$: vers le bas, coupe l'axe en $-\frac{1}{2}$ et 2 : c'est $\mathcal{C}_1$.
- $f_5(x) = (x - \frac{1}{2})^2$: $\Delta = 0$, vers le haut, touche l'axe en $\frac{1}{2}$: c'est $\mathcal{C}_4$.

→ Trois paraboles passent par $(0; 2)$: ce sont l'orientation et les racines qui les distinguent.

VIII — Variations de la fonction trinôme

Exercice 29 — Variations et forme canonique

- $a = 3 > 0$, $\alpha = 2$ et $\beta = 1$: minimum 1 en 2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

- $a = -2 < 0$, $\alpha = -3$ et $\beta = 4$: maximum 4 en -3 .

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$			

- $h(x) = x^2 + 6x$: $a = 1 > 0$. Racines -6 et 0 , donc $\alpha = \frac{-6+0}{2} = -3$, et $\beta = h(-3)$, soit

$$\beta = -3 \times 3 = -9 : \text{minimum } -9 \text{ en } -3.$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$h(x)$			

→ Dans $a(x - \alpha)^2 + \beta$, attention au signe : $(x + 3)^2 = (x - (-3))^2$ donne $\alpha = -3$.

Exercice 30 — Variations par α et β

A : $\alpha = -3$, $\beta = 9 - 18 + 7 = -2$, $a > 0$: décroissante puis croissante, minimum -2 en -3 .

B : $\alpha = -\frac{4}{2} = -2$, $\beta = -4 + 8 + 5 = 9$, $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum 9 en -2 .

C : $\alpha = \frac{12}{6} = 2$, $\beta = 12 - 24 + 5 = -7$, $a > 0$: décroissante puis croissante, minimum -7 en 2 .

D : $\alpha = -\frac{-2}{2 \times (-\frac{1}{2})} = -2$, $\beta = -2 + 4 = 2$, $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum 2 en -2 .

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
A			

x	$-\infty$	2	$+\infty$
B			

x	$-\infty$	2	$+\infty$
C			

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
D			

Exercice 31 — Un maximum

- $f(x) = -3(x^2 - 4x) - 10$

$$f(x) = -3[(x - 2)^2 - 4] - 10$$

$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 2$$

- $-3(x - 2)^2 \leq 0$, donc $f(x) \leq 2$ pour tout réel x ; et $f(2) = 2$: le maximum de f est 2, atteint pour $x = 2$.

Exercice 32 — Étude complète d'un trinôme

1) -1 est racine évidente ($-1 - 2 + 3 = 0$) et $S = -\frac{2}{-1} = 2$: racines -1 et 3 , donc $f(x) = -(x+1)(x-3)$.

2) $\alpha = -\frac{2}{-2} = 1$

$\beta = f(1) = -1 + 2 + 3$

$\beta = 4$

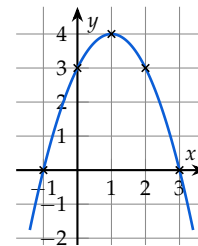
$a < 0$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		4	

3) $\frac{-1+3}{2} = 1 = \alpha$.

4)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

**IX — Équations se ramenant au second degré****Exercice 33 — Développer, puis résoudre**

1) $x^2 - 3x - 4 = 6 \iff x^2 - 3x - 10 = 0$; $\Delta = 49$, $x = \frac{3 \pm 7}{2}$. $S = \{-2; 5\}$

2) $(3x+1)^2 = 16 \iff 3x+1 = 4$ ou $3x+1 = -4$
 $\iff x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$

$S = \{-\frac{5}{3}; 1\}$

3) $x^2 - 4x + 3 = 0$: $x_1 = 1$ ($1 - 4 + 3 = 0$), $S = 4$, donc $x_2 = 3$. $S = \{1; 3\}$

4) $4x^2 + 12x + 9 = x^2 + 6x + 9 \iff 3x^2 + 6x = 0$
 $\iff 3x(x+2) = 0$

$S = \{-2; 0\}$

5) $x^2 - 6x + 9 = x + 3 \iff x^2 - 7x + 6 = 0$: racines 1 et 6. $S = \{1; 6\}$

6) $x^2 - 16 = 6x + 11 \iff x^2 - 6x - 27 = 0$; $\Delta = 144$, $x = \frac{6 \pm 12}{2}$. $S = \{-3; 9\}$

→ En 2), pas besoin de développer : $A^2 = 16 \iff A = 4$ ou $A = -4$. En 4), le terme constant disparaît : facteur commun, pas de discriminant.

Exercice 34 — Un seul quotient

1) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $12 = x^2 + x \iff x^2 + x - 12 = 0$; $\Delta = 49$: racines -4 et 3 , dans D . $S = \{-4; 3\}$

2) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $6 = x^2 - x \iff x^2 - x - 6 = 0$; $\Delta = 25$: racines -2 et 3 , dans D . $S = \{-2; 3\}$

3) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x + 10 = x^2 - 2x \iff x^2 - 3x - 10 = 0$; $\Delta = 49$: racines -2 et 5 , dans D .
 $S = \{-2; 5\}$

4) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x^2 + 8 = 6x \iff x^2 - 6x + 8 = 0$: racines 2 et 4, dans D . $S = \{2; 4\}$

Exercice 35 — Équations avec quotients

1) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. $x^2 - 6x + 9 = (2x - 5)(x - 3) \iff x^2 - 5x + 6 = 0$: racines 2 et 3, mais $3 \notin D$.
 $S = \{2\}$

2) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$. On multiplie par $x(x - 3)$:
 $2(x - 3) + 2x = x(x - 3) \iff 4x - 6 = x^2 - 3x$
 $\iff x^2 - 7x + 6 = 0$

Racines 1 et 6, dans D . $S = \{1; 6\}$

3) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. On multiplie par $2(x + 2)(x - 3)$:
 $2(x - 3) - 4(x + 2) = 3(x + 2)(x - 3) \iff -2x - 14 = 3x^2 - 3x - 18$
 $\iff 3x^2 - x - 4 = 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49$: $x = \frac{1 \pm 7}{6}$, soit $\frac{4}{3}$ et -1 , dans D . $S = \{-1; \frac{4}{3}\}$

4) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
 $2x^2 + 9x + 10 = (x + 3)(x + 2) \iff x^2 + 4x + 4 = 0$
 $\iff (x + 2)^2 = 0$

La seule valeur est -2 , qui n'est pas dans D . $S = \emptyset$

→ En 1), plus rapide : $\frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3$ sur D , donc $x - 3 = 2x - 5 \iff x = 2$. Contrôle en 3) avec $\frac{4}{3}$:
 $\frac{3}{10} + \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$.

X — Inéquations se ramenant au second degré**Exercice 36 — Développer, puis résoudre**

1) $x^2 + 4x + 3 \leq 2x + 6 \iff x^2 + 2x - 3 \leq 0$: racines -3 et 1 , $a > 0$. $S = [-3; 1]$

2) $9x^2 + 6x + 1 < x^2 + 6x + 9 \iff 8x^2 - 8 < 0$
 $\iff 8(x - 1)(x + 1) < 0$

$S =]-1; 1[$

3) $x^2 - 4x - 5 \geq 0$: racines -1 et 5 , $a > 0$. $S =]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$

4) $x^2 + 4x + 4 > 9 \iff x^2 + 4x - 5 > 0$: racines -5 et 1 . $S =]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[$

Exercice 37 — Signe d'un quotient

1) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$2x - 6$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{2x-6}{x+1}$	$+$	$-$	0	$+$

$S =]-1; 3]$ (-1 exclue : valeur interdite).

2) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $x^2 - 1$ a pour racines -1 et 1 .

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{x^2-1}{x+2}$	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-2; -1] \cup [1; +\infty[$$

- 3) Dénominateur : racines 1 (racine évidente) et $4 - 1 = 3$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$. Numérateur : racines 2 (racine évidente) et $-1 - 2 = -3$.

x	$-\infty$	-3	1	2	3	$+\infty$	
x^2+x-6	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$

$$S =]-\infty; -3[\cup]1; 2[\cup]3; +\infty[$$

- 4) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; le numérateur a pour racines 1 et 4.

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$	
$x^2 -$						
$5x + 4$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x^2-5x+4}{x-2}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

$$S =]-\infty; 1[\cup]2; 4[$$

Exercice 38 — Tout dans un membre

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On ramène tout dans un membre :

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{2-x} - (3x+1) &\geq 0 \iff \frac{x+2 - (3x+1)(2-x)}{2-x} \geq 0 \\ &\iff \frac{3x^2 - 4x}{2-x} \geq 0 \\ &\iff \frac{x(3x-4)}{2-x} \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x - 4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x(3x-4)}{2-x}$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-\infty; 0] \cup [\frac{4}{3}; 2[$$

→ Erreur classique : multiplier par $2 - x$ sans connaître son signe. Contrôle avec $x = 3$, hors de S : $\frac{5}{-1} = -5$, qui n'est pas ≥ 10 .

XI — Problèmes

Exercice 39 — Le nombre mystère

Soit $x \geq 0$ le nombre : $x^2 - 3x = 40 \iff x^2 - 3x - 40 = 0$. $\Delta = 9 + 160 = 169$ et $\sqrt{169} = 13$, donc $x = \frac{3 \pm 13}{2}$, soit 8 ou -5. Le nombre est positif : c'est 8 ($64 - 24 = 40$).

Exercice 40 — Une voile d'ombrage

Soit $x > 0$ le plus petit côté de l'angle droit, en m ; l'autre mesure $x + 2$.

$\frac{x(x+2)}{2} = 12 \iff x^2 + 2x - 24 = 0$; $\Delta = 4 + 96 = 100$, donc $x = \frac{-2 \pm 10}{2}$, soit 4 ou -6. Comme $x > 0$: **4 m et 6 m** ($\frac{4 \times 6}{2} = 12$).

Exercice 41 — Agrandir une photo

Soit $c > 0$ le côté de départ, en cm :

$(c + 12)^2 = 4c^2 \iff 3c^2 - 24c - 144 = 0 \iff c^2 - 8c - 48 = 0$; $\Delta = 64 + 192 = 256$, donc $c = \frac{8 \pm 16}{2}$, soit 12 ou -4. Le côté mesurait **12 cm** ($24^2 = 576 = 4 \times 144$).

→ Plus rapide : $(c + 12)^2 = (2c)^2$ avec des longueurs positives, donc $c + 12 = 2c$.

Exercice 42 — La bordure d'une tablette

Soit $x > 0$ la largeur de la bordure, en cm. La tablette mesure $24 + 2x$ sur $16 + 2x$:

$$(24 + 2x)(16 + 2x) = 560 \iff 4x^2 + 80x + 384 = 560$$

$$\iff x^2 + 20x - 44 = 0$$

$\Delta = 400 + 176 = 576$ et $\sqrt{576} = 24$, donc $x = \frac{-20 \pm 24}{2}$, soit 2 ou -22. La bordure mesure **2 cm** de large ($28 \times 20 = 560$).

→ La bordure s'ajoute des deux côtés : $24 + 2x$, et non $24 + x$.

Exercice 43 — Des vélos reconditionnés

1) $B(5) = -250 + 2000 - 3000 = -1250$: perte de 1250 euros.

$B(12) = -1440 + 4800 - 3000 = 360$: bénéfice de 360 euros.

2) $B(x) = -10(x^2 - 40x + 300)$; $\Delta = 1600 - 1200 = 400$, racines $\frac{40 \pm 20}{2}$, soit 10 et 30. Comme $a = -10 < 0$, $B(x) > 0$ entre les racines : $S =]10 ; 30[$. L'atelier est bénéficiaire de **11 à 29 vélos** vendus.

3) $\alpha = -\frac{400}{2 \times (-10)} = 20$ et $B(20) = -4000 + 8000 - 3000 = 1000$: bénéfice maximal de **1000 euros** pour **20 vélos**.

→ 20 est le milieu des racines 10 et 30.