

LE SECOND DEGRÉ

Cours — Première spécialité

Comment utiliser ce cours

Chaque partie commence par ce qu'il faut **savoir** (définitions, théorèmes), puis vient ce qu'il faut **savoir faire** : une méthode, avec des **exemples corrigés** faits en classe, puis des exercices « **À vous de jouer** » à chercher seul.

I — La forme canonique du trinôme

Définition 1 — Trinôme du second degré

Un **trinôme du second degré** (ou **trinôme**) est une expression de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des réels, avec } a \neq 0.$$

Exemple

$P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est un trinôme : $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.

Un même trinôme peut s'écrire de plusieurs façons : forme développée, forme canonique et forme factorisée (si elle existe). La **forme canonique** est celle qui montre s'il se factorise et quel est son extremum. Pour l'obtenir, on fait apparaître une **identité remarquable**.

Exemple — compléter un carré

Soit $P(x) = x^2 + 8x + 5$. On sait que $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$: les deux premiers termes de $P(x)$ sont le début de ce carré, auquel il manque 16.

$$P(x) = x^2 + 8x + 16 - 16 + 5 \quad \text{on ajoute 16 et on le retire aussitôt}$$

$$P(x) = (x + 4)^2 - 11 \quad \text{forme canonique}$$

Théorème 1 — Forme canonique

Tout trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit, d'une seule façon,

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

Exemple — lire a , α et β

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5 \quad a = 2, \alpha = 3 \text{ et } \beta = 5$$

$$g(x) = (x + 4)^2 - 1 \quad x + 4 = x - (-4) : a = 1, \alpha = -4 \text{ et } \beta = -1$$

$$h(x) = -x^2 + 6 \quad -(x - 0)^2 + 6 : a = -1, \alpha = 0 \text{ et } \beta = 6$$

⚠ α est le nombre que l'on **retranche** à x : dans $(x + 4)$, $\alpha = -4$.

Inversement, avec $a = -3$, $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, la forme canonique est $P(x) = -3(x - 1)^2 + 2$. On retrouve la forme développée en développant :

$$P(x) = -3(x - 1)^2 + 2 \quad \text{on recopie}$$

$$P(x) = -3(x^2 - 2x + 1) + 2 \quad \text{identité remarquable, entre parenthèses}$$

$$P(x) = -3x^2 + 6x - 1 \quad \text{on distribue le } -3, \text{ puis on réduit}$$

Méthode 1 — Mettre un trinôme sous forme canonique

Exemples corrigés

Écrire chaque trinôme sous forme canonique.

a) $P(x) = x^2 - 10x + 16$

b) $Q(x) = 2x^2 + 10x + 7 \quad (a \neq 1)$

c) $R(x) = -x^2 + 6x - 11 \quad (a < 0)$

a)

$P(x) = x^2 - 10x + 16$

 $x^2 - 10x$ est le début de $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$P(x) = x^2 - 10x + 25 - 25 + 16$

on ajoute 25 et on le retire

$P(x) = (x - 5)^2 - 9$

on réduit

b)

$Q(x) = 2x^2 + 10x + 7$

on recopie

$Q(x) = 2(x^2 + 5x) + 7$

 $a \neq 1 : 2$ en facteur dans les deux premiers termes

$Q(x) = 2 \left[\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \right] + 7$

 $x^2 + 5x$ est le début de $\left(x + \frac{5}{2} \right)^2$

$Q(x) = 2 \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{25}{2} + 7$

on distribue le 2

$Q(x) = 2 \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{11}{2}$

on réduit

c)

$R(x) = -x^2 + 6x - 11$

on recopie

$R(x) = -(x^2 - 6x) - 11$

 -1 en facteur : les signes changent dans la parenthèse

$R(x) = -[(x - 3)^2 - 9] - 11$

 $x^2 - 6x$ est le début de $(x - 3)^2$

$R(x) = -(x - 3)^2 - 2$

on distribue le « - », puis on réduit

À vous de jouer

Écrire chaque trinôme sous forme canonique :

$A(x) = x^2 + 12x + 20 \quad B(x) = 2x^2 - 2x - 3 \quad C(x) = -3x^2 + 12x - 14$

Réponses : $A(x) = (x + 6)^2 - 16$; $B(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{7}{2}$; $C(x) = -3(x - 2)^2 - 2$.

► À faire : fiche d'exercices du chapitre, exercices 1 à 3.

II — Calcul de α et β , factorisation

Démonstration (non exigible)

C'est le même calcul que pour compléter un carré, avec des lettres.

$$P(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \quad \text{on met } a \neq 0 \text{ en facteur dans les deux premiers termes}$$

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c \quad x^2 + \frac{b}{a}x \text{ est le début de } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad \text{on distribue } a$$

On reconnaît $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Pour β , inutile de retenir une formule : en $x = \alpha$ le carré est nul, donc $P(\alpha) = \beta$.

Théorème 1 (complet) — Forme canonique

Tout trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit, d'une seule façon,

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha)$$

À quoi sert la forme canonique ?

Dans $a(x - \alpha)^2 + \beta$, on regarde les signes de a et de β :

- **signes contraires** : on factorise avec $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$;
- **même signe** ($\beta \neq 0$) : le trinôme ne s'annule jamais, il ne se factorise pas.

Méthode 2 — Forme canonique par α et β , puis factorisation

Exemples corrigés

Pour chaque trinôme, calculer α et β et écrire la forme canonique, puis factoriser quand c'est possible.

a) $P(x) = x^2 - 10x + 16$

b) $Q(x) = 2x^2 - 4x - 6 \quad (a \neq 1)$

c) $R(x) = -x^2 + 4x - 7 \quad (a < 0)$

a)

$a = 1, b = -10$ et $c = 16$.

on lit a, b, c

$$\alpha = -\frac{-10}{2} = 5 \quad \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = P(5) = 25 - 50 + 16 \quad \beta = P(\alpha)$$

$$\beta = -9$$

Forme canonique : $P(x) = (x - 5)^2 - 9$.

$a(x - \alpha)^2 + \beta$; on retrouve la méthode 1

$$P(x) = (x - 5)^2 - 3^2 \quad a > 0 \text{ et } \beta < 0 : \text{forme } u^2 - v^2$$

$$P(x) = (x - 5 - 3)(x - 5 + 3) \quad (u - v)(u + v)$$

$$P(x) = (x - 8)(x - 2) \quad \text{on réduit}$$

b)

$a = 2, b = -4$ et $c = -6$.

$$\alpha = -\frac{-4}{4} = 1 \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = Q(1) = 2 - 4 - 6 \qquad \beta = Q(\alpha)$$

$$\beta = -8$$

Forme canonique : $Q(x) = 2(x - 1)^2 - 8$.

$$Q(x) = 2[(x - 1)^2 - 4] \qquad 2 \text{ en facteur}$$

$$Q(x) = 2[(x - 1)^2 - 2^2] \qquad \text{forme } u^2 - v^2 \text{ dans le crochet}$$

$$Q(x) = 2(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) \qquad (u - v)(u + v)$$

$$Q(x) = 2(x - 3)(x + 1) \qquad \text{on réduit}$$

c)

$a = -1, b = 4$ et $c = -7$.

$$\alpha = -\frac{4}{-2} = 2 \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = R(2) = -4 + 8 - 7 \qquad \beta = R(\alpha)$$

$$\beta = -3$$

Forme canonique : $R(x) = -(x - 2)^2 - 3$.

$a < 0$ et $\beta < 0$: R ne se factorise pas.

même signe : pas de factorisation

À vous de jouer

Pour chaque trinôme, calculer α et β et écrire la forme canonique, puis factoriser quand c'est possible :

$$A(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad B(x) = 3x^2 + 6x - 9 \qquad C(x) = -2x^2 + 8x - 11$$

Réponses : $A(x) = (x - 1)^2 - 9 = (x - 4)(x + 2)$; $B(x) = 3(x + 1)^2 - 12 = 3(x - 1)(x + 3)$; $C(x) = -2(x - 2)^2 - 3$, qui ne se factorise pas.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 4 à 6.

III — Racines du trinôme et équations du second degré

Définition 2 — Racines et discriminant

Les **racines** d'un trinôme sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Le **discriminant** du trinôme est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 2 — Nombre de racines

- Si $\Delta > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: une seule racine (dite **double**) $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: aucune racine réelle.

Pourquoi ?

En reprenant la démonstration de la partie II, la forme canonique s'écrit

$$P(x) = a \left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Si $\Delta < 0$, le crochet est la somme d'un carré et d'un nombre strictement positif : il ne s'annule pas. Si $\Delta = 0$, il reste $a(x - \alpha)^2$, nul seulement en α . Si $\Delta > 0$, le crochet est une différence de deux carrés, qui se factorise et donne deux racines.

Méthode 3 — Résoudre une équation du second degré**Exemples corrigés**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$

b) $5x^2 - 20x + 20 = 0$

c) $x^2 - 3x + 5 = 0$

d) $9x^2 - 16 = 0$ et $4x^2 + 12x + 9 = 0$

a)

$a = 3, b = -4$ et $c = -4$.

pas de factorisation directe : on lit a, b, c

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 16 + 48$$

$$\Delta = 64 = 8^2$$

$\Delta > 0$: deux racines

$$x_1 = \frac{4+8}{6} = 2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{3}; 2 \right\}.$$

on conclut par l'ensemble des solutions

b)

$a = 5, b = -20$ et $c = 20$.

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 20$$

$$\Delta = 400 - 400 = 0$$

$\Delta = 0$: une racine double

$$x_0 = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$S = \{2\}.$$

c)

$a = 1, b = -3$ et $c = 5$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11$$

$\Delta < 0$: aucune racine

$$S = \emptyset.$$

d)

$$9x^2 - 16 = 0 \iff (3x - 4)(3x + 4) = 0 \quad \text{factorisation directe } (u^2 - v^2) : \text{pas de } \Delta$$

$$\iff x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 0 \iff (2x + 3)^2 = 0 \quad u^2 + 2uv + v^2$$

$$\iff x = -\frac{3}{2}$$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \quad 3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad 4x^2 - 25 = 0$$

Réponses : $\Delta = 1 : S = \{4; 5\}$; $\Delta = -8 : S = \emptyset$; $(3x + 1)^2 = 0 : S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; $(2x - 5)(2x + 5) = 0 : S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 7 à 11.

IV — Factorisation du trinôme

Quand $\Delta > 0$, la différence de deux carrés de la partie III se factorise ; ses deux facteurs s'annulent en x_1 et en x_2 . On obtient :

Théorème 3 — Forme factorisée

- Si $\Delta > 0$: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$: $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$: le trinôme **ne se factorise pas**.

⚠ Le facteur a

On n'oublie pas a devant les parenthèses. Contrôle rapide : le terme constant de $a(x - x_1)(x - x_2)$ est $a x_1 x_2$, qui doit valoir c .

Méthode 4 — Factoriser un trinôme

Exemples corrigés

Factoriser, quand c'est possible, les trinômes suivants.

a) $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$

b) $Q(x) = 5x^2 - 20x + 20$

c) $R(x) = x^2 - 3x + 5$

d) $T(x) = x^2 + 2x - 15$

a)

$$\Delta = 64 ; \text{ racines } 2 \text{ et } -\frac{2}{3}.$$

pas de factorisation directe : on cherche les racines (méthode 3)

$$P(x) = 3(x - 2) \left(x + \frac{2}{3}\right) \quad a(x - x_1)(x - x_2) : \text{on n'oublie pas } a = 3 \text{ devant}$$

$$P(x) = (x - 2)(3x + 2) \quad \text{on fait entrer le 3 dans la seconde parenthèse}$$

Contrôle : terme constant $-2 \times 2 = -4$.

$a x_1 x_2$ doit valoir c

b)

$$\Delta = 0 \text{ et } x_0 = 2, \text{ donc } Q(x) = 5(x - 2)^2.$$

$a(x - x_0)^2$: la racine 2 compte « deux fois »

c)

 $\Delta = -11 < 0 : R$ ne se factorise pas.

aucune racine, aucune factorisation

d)

$$\Delta = 4 + 60 \quad a = 1, b = 2 \text{ et } c = -15$$

$$\Delta = 64 = 8^2$$

$$x_1 = \frac{-2+8}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-2-8}{2} = -5$$

$$T(x) = (x-3)(x+5).$$

 $a = 1$: rien devant les parenthèses ;
 $x - (-5) = x + 5$

À vous de jouer

Factoriser quand c'est possible :

$$A(x) = x^2 + x - 12 \quad B(x) = 3x^2 - 7x + 2 \quad C(x) = x^2 - 2x + 3 \quad D(x) = -2x^2 + 3x + 2$$

Réponses : $A(x) = (x-3)(x+4)$; $B(x) = 3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x-2)(3x-1)$; C ne se factorise pas ($\Delta = -8$) ; $D(x) = -2\left(x-2\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = -(x-2)(2x+1)$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 12 à 14.

V — Somme et produit des racines

On suppose que le trinôme a deux racines x_1 et x_2 . On note $S = x_1 + x_2$ leur **somme** et $P = x_1 x_2$ leur **produit**. On développe la forme factorisée :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \quad \text{calcul intermédiaire : on développe}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P) \quad \text{avec } S = x_1 + x_2 \text{ et } P = x_1 x_2$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - aSx + aP$$

En identifiant les coefficients : $b = -aS$ et $c = aP$.

Théorème 4 — Somme et produit des racines

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines, leur somme S et leur produit P valent

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}$$

En pratique, on met a en facteur : $ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P)$.

Exemple — lire S et P

$$3x^2 - 4x - 4 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right)$$

donc $S = \frac{4}{3}$ et $P = -\frac{4}{3}$. Avec les racines 2 et $-\frac{2}{3}$ de la méthode 3 : $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ et $2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

Définition 3 — Racine évidente

Une **racine évidente** est une racine que l'on trouve de tête, en essayant des valeurs simples : 1, -1, 2, -2...

Méthode 5 — Trouver les racines sans discriminant**Exemples corrigés**

Résoudre les équations suivantes sans calculer de discriminant.

a) $3x^2 - 8x + 5 = 0$

b) $4x^2 + 3x - 1 = 0$

c) $x^2 - 8x + 12 = 0$

a)

$3 \times 1^2 - 8 \times 1 + 5 = 0$

on essaie 1 de tête : $x_1 = 1$ est racine évidente

$$S = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$S = -\frac{b}{a}$$

$$x_2 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = S - x_1$$

Contrôle : $1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$. Donc $S = \left\{1; \frac{5}{3}\right\}$.

le produit $x_1 x_2$ doit valoir $P = \frac{c}{a}$ **b)**

$4 \times 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 6$

1 n'est pas racine

$4 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) - 1 = 0$

 $x_1 = -1$ est racine évidente

$$S = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - (-1) = \frac{1}{4}$$

attention : on retranche -1

Contrôle : $(-1) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$. Donc $S = \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$.

$$\frac{c}{a} = -\frac{1}{4}$$

c)

1 ne convient pas ($1 - 8 + 12 = 5$), -1 non plus ($1 + 8 + 12 = 21$); 2 convient : $4 - 16 + 12 = 0$.

on essaie 1, -1, 2... jusqu'à trouver une racine

$S = 8$, donc $x_2 = 8 - 2 = 6$; contrôle : $2 \times 6 = 12$. Donc $S = \{2; 6\}$.

somme $-\frac{b}{a} = 8$; produit $\frac{c}{a} = 12$ **À vous de jouer**

Trouver une racine évidente, puis l'autre racine avec la somme :

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad 4x^2 - 7x + 3 = 0 \quad x^2 + 2x - 8 = 0 \quad -3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Réponses : $x_1 = -1$ et $S = -5$, donc $x_2 = -4$; $x_1 = 1$ et $S = \frac{7}{4}$, donc $x_2 = \frac{3}{4}$; $x_1 = 2$ et $S = -2$, donc $x_2 = -4$; $x_1 = 1$ et $S = \frac{2}{3}$, donc $x_2 = -\frac{1}{3}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 15 à 20.

VI — Signe du trinôme et inéquations du second degré**Deux racines**

Si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$, le signe de $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ se lit dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	—	0	+	+
$x - x_2$	—	—	0	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

Le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines, le signe contraire **entre** les racines.

Une seule racine ou aucune

Si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x - x_0)^2$: un carré est positif, donc $P(x)$ a le signe de a , et s'annule en x_0 .

Si $\Delta < 0$, $P(x) = a \left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ et le crochet est strictement positif : $P(x)$ a toujours le signe de a .

Théorème 5 — Signe du trinôme

Le signe de $P(x)$ dépend de Δ et du signe de a :

$$\Delta > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	a	0	$-a$	0

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	a	0	a

$$\Delta < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	a	a

Dans chaque case, « a » signifie « du signe de a ».

Exemple — signe de $-4x^2 + 4x + 3$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) \times 3$$

$$\Delta = 64 \quad \text{deux racines}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 8}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 8}{-8} = \frac{3}{2}$$

$a = -4 < 0$: négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$-4x^2 + 4x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Méthode 6 — Résoudre une inéquation du second degré

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^2 - 5x + 4 > 0$

b) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

c) $x^2 + 2x + 6 > 0$

d) $3x^2 - 12x + 12 \leq 0$

a)

1 est racine évidente ($1 - 5 + 4 = 0$); l'autre racine est $5 - 1 = 4$.
 $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur des racines.

on cherche les racines ; somme des racines 5

tableau de signes (théorème 5)

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$x^2 - 5x + 4$		+	0	-	0	+

$$S =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[.$$

inégalité stricte : racines exclues, crochets ouverts

b)

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 4 \quad \text{pas de racine évidente : discriminant}$$

$$\Delta = 20 \quad \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{-2} = 1 - \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$S =]1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}[.$$

$a = -1 < 0$: le trinôme est positif entre les racines

c)

$$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0 : S = \mathbb{R}.$$

pas de racine : le trinôme a toujours le signe de $a = 1 > 0$

d)

$$\Delta = 144 - 144 = 0 \text{ et } x_0 = \frac{12}{6} = 2 : S = \{2\}.$$

le trinôme est positif ($a > 0$) et ne s'annule qu'en 2 ; ≤ 0 seulement en 2

À vous de jouer

Résoudre :

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad x^2 + x + 2 < 0 \quad 2x^2 + 8x + 8 > 0$$

Réponses : racines -4 et 2 , $a > 0$: $S =]-4; 2[$; racines 1 et 5 : $S =]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$; $\Delta = -7 < 0$ et $a > 0$: $S = \emptyset$; $2(x+2)^2 > 0$: $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 21 à 23.

VII — Représentation graphique de la fonction trinôme

Dans cette partie, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple — l'extremum se lit sur la forme canonique

Soit $f(x) = 3(x + 2)^2 - 1$. Pour tout réel x :

$$(x + 2)^2 \geq 0 \quad \text{un carré est positif}$$

$$3(x + 2)^2 - 1 \geq -1 \quad \text{on multiplie par } 3 > 0, \text{ puis on retranche } 1$$

$$f(x) \geq -1$$

Et $f(-2) = -1$: f a un **minimum**, égal à -1 , atteint en -2 .

Définition 4 — Parabole et sommet

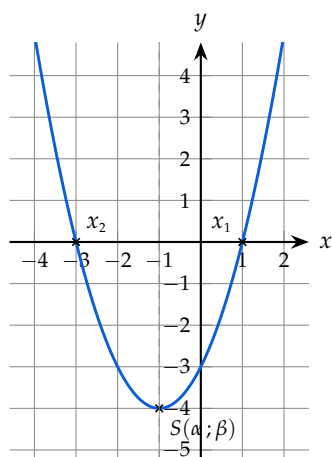
La courbe d'une fonction trinôme est une **parabole**. Son **sommet** est le point $S(\alpha; \beta)$.

Théorème 6 — Orientation et extremum

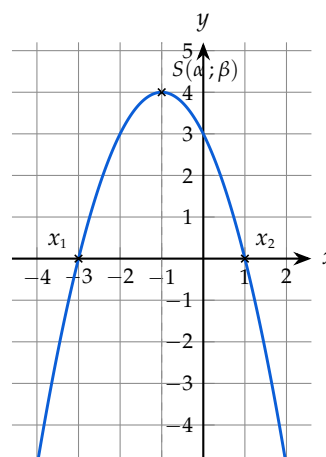
- Si $a > 0$: parabole **tournée vers le haut** ; f a un **minimum** β , atteint en α .
- Si $a < 0$: parabole **tournée vers le bas** ; f a un **maximum** β , atteint en α .

La parabole est **symétrique** par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

$$a > 0 : f(x) = x^2 + 2x - 3$$



$$a < 0 : g(x) = -x^2 - 2x + 3$$

**Racines et parabole**

Les racines sont les abscisses des points où la parabole **coupe l'axe des abscisses** : deux points si $\Delta > 0$, un seul (le sommet) si $\Delta = 0$, aucun si $\Delta < 0$. Avec deux racines, α est leur **milieu** : sur les figures,

$$\frac{-3 + 1}{2} = -1 = \alpha.$$

Méthode 7 — Tracer l'allure d'une parabole**Exemples corrigés**

Tracer l'allure de la courbe de chaque fonction.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$

c) $h(x) = x^2 + 4x + 6$

a)

$$a = 1 > 0$$

tournée vers le haut

$$\alpha = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = f(-1) = 1 - 2 - 3$$

$$\beta = -4$$

sommet $S(-1; -4)$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

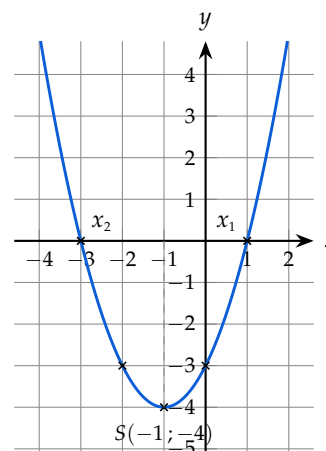
racines placées sur l'axe

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$f(0) = -3$$

(0; -3) et son symétrique (-2; -3)



b)

$$a = -1 < 0$$

tournée vers le bas

$$\alpha = -\frac{-2}{-2} = -1$$

$$\beta = g(-1) = -1 + 2 + 3$$

$$\beta = 4$$

sommet $S(-1; 4)$

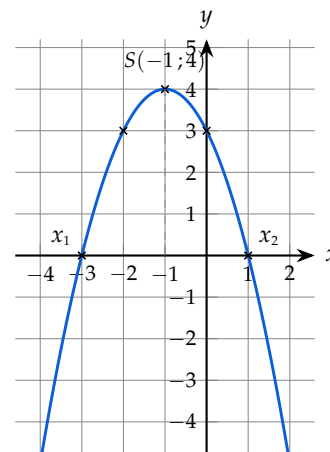
$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{2+4}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{2-4}{-2} = 1$$

$$g(0) = 3$$

(0; 3) et son symétrique (-2; 3)



c)

$$a = 1 > 0$$

tournée vers le haut

$$\alpha = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\beta = h(-2) = 4 - 8 + 6$$

$$\beta = 2$$

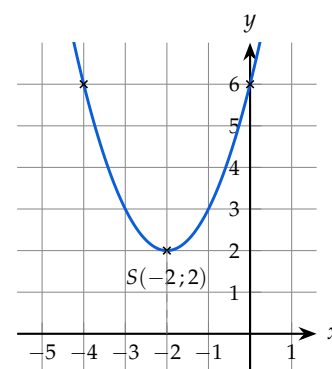
sommet $S(-2; 2)$

$$\Delta = 16 - 24 = -8$$

aucune racine : la courbe ne coupe pas l'axe

$$h(0) = 6$$

(0; 6) et son symétrique (-4; 6)



À vous de jouer

Pour chaque fonction : orientation, sommet, racines éventuelles, puis allure de la courbe.

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3 \quad f_2(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad f_3(x) = x^2 - 2x + 5$$

Réponses : f_1 : vers le haut, $S(2; -1)$, racines 1 et 3; f_2 : vers le bas, $S(3; 4)$, racines 1 et 5; f_3 : vers le haut, $S(1; 4)$, $\Delta = -16 < 0$ donc aucune racine.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 24 à 28.

VIII — Variations de la fonction trinôme

Théorème 7 — Tableau de variations

$a > 0$: minimum β en α

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

$a < 0$: maximum β en α

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Méthode 8 — Dresser le tableau de variations d'un trinôme

Exemples corrigés

Dresser le tableau de variations de chaque fonction, puis donner son extremum.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 10$

b) $g(x) = -3x^2 - 6x - 7$

c) $h(x) = (x + 1)(x - 5)$

a)

$$a = 1 > 0$$

un « creux » : décroissante, puis croissante

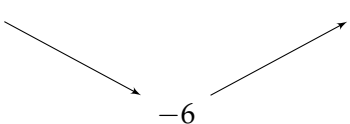
$$\alpha = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = f(-4) = 16 - 32 + 10$$

$$\beta = f(\alpha)$$

$$\beta = -6$$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$			

f a un minimum, égal à -6 , atteint en -4 .

α est la seule valeur au milieu du tableau

b)

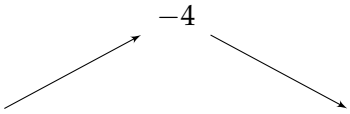
$$a = -3 < 0$$

une « bosse » : croissante, puis décroissante

$$\alpha = -\frac{-6}{2 \times (-3)} = -1$$

$$\beta = g(-1) = -3 + 6 - 7$$

$$\beta = -4$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$			

g a un maximum, égal à -4 , atteint en -1 .

ce maximum est négatif : $g(x) < 0$ pour tout réel x

c)

$$\alpha = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

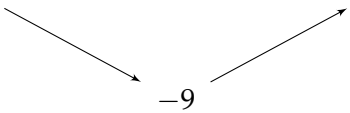
les racines -1 et 5 se lisent ; α est leur milieu

$$\beta = h(2) = 3 \times (-3)$$

$$\beta = -9$$

$$h(x) = x^2 - 4x - 5$$

en développant : $a = 1 > 0$, un creux

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$			

À vous de jouer

Dresser le tableau de variations et donner l'extremum :

$$f_1(x) = x^2 + 6x + 4 \quad f_2(x) = -2(x - 3)^2 + 7 \quad f_3(x) = 3x^2 - 6x - 1$$

Réponses : f_1 : minimum -5 en -3 ; f_2 : maximum 7 en 3 ; f_3 : minimum -4 en 1 .

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 29 à 32.

IX — Équations se ramenant au second degré

Une équation qui contient des produits, des carrés ou des quotients devient souvent, après calcul, une équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Méthode 9 — Résoudre une équation se ramenant au second degré**Exemples corrigés**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) Un produit : $(x + 3)(x - 2) = 14$.

b) Deux carrés : $(3x - 1)^2 = (x + 1)^2$.

c) Un quotient : $\frac{6}{x} = x + 1$.

d) Une valeur à rejeter : $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 3x - 4$.

e) Deux quotients : $\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{1}{3}$.

a)

$$(x + 3)(x - 2) = 14 \iff x^2 + x - 6 = 14 \quad \text{on développe}$$

$$\iff x^2 + x - 20 = 0 \quad \text{tout dans un membre : } ax^2 + bx + c = 0$$

4 est racine évidente ($16 + 4 - 20 = 0$); l'autre racine est $-1 - 4 = -5$. $S = \{-5; 4\}$.

méthode 5 : la somme des racines vaut $-\frac{b}{a} = -1$

b)

$$(3x - 1)^2 = (x + 1)^2 \iff 9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{on développe}$$

$$\iff 8x^2 - 8x = 0 \quad \text{tout dans un membre}$$

$$\iff 8x(x - 1) = 0 \quad \text{facteur commun : pas de } \Delta$$

$$S = \{0; 1\}.$$

produit nul

c)

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

un quotient : on écrit d'abord l'ensemble de définition

$$\frac{6}{x} = x + 1 \iff 6 = x(x + 1) \quad \text{on multiplie par } x \neq 0$$

$$\iff x^2 + x - 6 = 0$$

Racines 2 (racine évidente) et $-1 - 2 = -3$, toutes deux dans D : $S = \{-3; 2\}$.

on ne garde que les solutions qui sont dans D

d)

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 3x - 4 \iff x^2 - 4x + 4 = (3x - 4)(x - 2) \quad \text{on multiplie par } x - 2 \neq 0$$

$$\iff x^2 - 4x + 4 = 3x^2 - 10x + 8$$

$$\iff 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

on divise par 2

Racines 1 et 2. **Mais** $2 \notin D : S = \{1\}$.

la valeur interdite 2 est rejetée

e)

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}.$$

$$3(2x - 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(2x - 1) \iff 3 = 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{on a multiplié par } 3(x - 1)(2x - 1), \text{ non nul sur } D$$

$$\iff 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \text{ donc } x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}. \quad \text{méthode 3}$$

$$\text{Les deux sont dans } D : S = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

À vous de jouer

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(x+2)(x-3) = 6 \quad (2x+1)^2 = (x+3)^2 \quad \frac{8}{x} = x+2 \quad \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = x+1$$

Réponses : $x^2 - x - 12 = 0 : S = \{-3; 4\}$; $3x^2 - 2x - 8 = 0 : S = \left\{ -\frac{4}{3}; 2 \right\}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x^2 + 2x - 8 = 0 : S = \{-4; 2\}$;
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et $x^2 + x - 6 = 0$ donne 2 et -3, qui est rejetée : $S = \{2\}$.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 33 à 35.

X — Inéquations se ramenant au second degré

Méthode 10 — Résoudre une inéquation se ramenant au second degré

Exemples corrigés

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) Un produit : $(x+4)(x-1) < 3x+12$.

b) Un quotient de trinômes : $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$.

c) Deux quotients : $\frac{x+1}{x-2} < \frac{2}{x+1}$.

a)

$$(x+4)(x-1) < 3x+12 \iff x^2 + 3x - 4 < 3x + 12$$

on développe

$$\iff x^2 - 16 < 0$$

tout dans un membre : on compare à 0

$$\iff (x-4)(x+4) < 0$$

$$u^2 - v^2$$

$$S =]-4; 4[.$$

$a = 1 > 0$: négatif entre les racines -4 et 4

b)

Dénominateur : racines 1 (évidente) et $-2 - 1 = -3$, donc
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

quotient : on écrit d'abord l'ensemble de définition;
 somme des racines -2

Numérateur : racines -1 (évidente) et $1 - (-1) = 2$.

somme des racines 1

Les deux trinômes ont $a = 1 > 0$: positifs à l'extérieur de leurs racines.

on ne multiplie jamais par un dénominateur :
tableau de signes, double barre aux valeurs interdites

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	+	0	-	-	0	+
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	-	0	+	+
$\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}$	+	-	0	+	-	0	+

$$S =]-\infty; -3[\cup [-1; 1[\cup [2; +\infty[.$$

crochets fermés aux zéros du numérateur ($\geq$),
ouverts aux valeurs interdites

c)

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}.$$

$$\frac{x+1}{x-2} < \frac{2}{x+1} \iff \frac{x+1}{x-2} - \frac{2}{x+1} < 0 \quad \text{tout dans un membre}$$

$$\iff \frac{(x+1)^2 - 2(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0 \quad \text{même dénominateur}$$

$$\iff \frac{x^2 + 5}{(x-2)(x+1)} < 0 \quad \text{on développe le numérateur}$$

$x^2 + 5 > 0$ pour tout x : le quotient a le signe du dénominateur.

un carré plus 5 est toujours positif

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 + 5$	$+$	$+$	$+$		
$(x - 2)(x + 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+5}{(x-2)(x+1)}$	$+$		$-$		$+$

$$S =]-1; 2[.$$

on lit le signe - ; -1 et 2 sont interdits

À vous de jouer

Résoudre :

$$(x+3)(x-2) < x+3 \quad \frac{x^2-4}{x^2-4x+3} \geq 0 \quad \frac{x+2}{x-1} < \frac{3}{x+2}$$

Réponses : $x^2 - 9 < 0 : S =]-3; 3[$; $S =]-\infty; -2] \cup]1; 2] \cup]3; +\infty[$; $\frac{x^2+x+7}{(x-1)(x+2)} < 0 : S =]-2; 1[.$

Erreur à éviter

Dans une inéquation, multiplier les deux membres par un dénominateur change le sens de l'inégalité quand

il est négatif. Comme on ne connaît pas son signe, on étudie le signe d'un quotient.

► **À faire :** fiche d'exercices du chapitre, exercices 36 à 38.

XI — Résoudre un problème du second degré

Méthode 11 — Résoudre un problème du second degré

Exemples corrigés

- a) **Deux pages d'un livre.** On ouvre un livre au hasard. Le produit des numéros des deux pages visibles vaut 156. Quels sont ces numéros ?
- b) **Un panneau solaire.** Un panneau solaire rectangulaire a un périmètre de 22 dm et une aire de 28 dm². Quelles sont ses dimensions ?
- c) **Une balle lancée d'une terrasse.** Sa hauteur au-dessus du sol, en mètres, t secondes après le lancer, est $h(t) = -5t^2 + 10t + 40$ pour $t \geq 0$. **1)** Quelle hauteur maximale atteint-elle, et quand ? **2)** Quand touche-t-elle le sol ?
- d) **Agrandir une terrasse.** Une terrasse rectangulaire mesure 6 m sur 4 m. On allonge ses deux côtés d'une même longueur x , et son aire passe à 48 m². Trouver x .

a) Soit x le numéro de la page de gauche, entier positif ; celle de droite porte le numéro $x + 1$. *inconnue : ce qu'elle représente, ses valeurs possibles*

$$x(x + 1) = 156$$

équation : on traduit l'énoncé

$$x^2 + x - 156 = 0$$

$$\Delta = 1 + 624$$

résolution

$$\Delta = 625 = 25^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + 25}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-1 - 25}{2} = -13$$

Les pages sont la 12 et la 13 ($12 \times 13 = 156$).

retour à l'énoncé : -13 n'est pas un numéro de page

b) Soit x la longueur en dm ; la largeur est $11 - x$, avec $0 < x < 11$.

le demi-périmètre vaut 11

$$x(11 - x) = 28$$

l'aire

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$\Delta = 121 - 112 = 9$$

$$x_1 = \frac{11 + 3}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{11 - 3}{2} = 4$$

Le panneau mesure 7 dm sur 4 dm.

*les deux valeurs donnent le même rectangle ;
contrôle : $2 \times (7 + 4) = 22$ et $7 \times 4 = 28$*

c)

$$a = -5 < 0$$

1) h a un maximum

$$\alpha = -\frac{10}{2 \times (-5)} = 1$$

$$\beta = h(1) = -5 + 10 + 40$$

$$\beta = 45$$

t	0	1	$+\infty$
$h(t)$	40	45	

La balle monte jusqu'à 45 m, au bout de 1 seconde.

une phrase qui répond à la question

$$-5t^2 + 10t + 40 = 0 \iff t^2 - 2t - 8 = 0 \quad 2) \text{ sol : } h(t) = 0; \text{ on divise par } -5$$

-2 est racine évidente ($4 + 4 - 8 = 0$); l'autre racine est
 $2 - (-2) = 4$. La balle touche le sol au bout de 4 secondes.

somme des racines 2; $t \geq 0$: on rejette -2

d)

$$(6 + x)(4 + x) = 48$$

l'aire après agrandissement, avec $x > 0$

$$x^2 + 10x + 24 = 48$$

on développe

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\Delta = 100 + 96$$

$$\Delta = 196 = 14^2$$

$$x_1 = \frac{-10 + 14}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-10 - 14}{2} = -12$$

On allonge chaque côté de 2 m.

 $x > 0$: on rejette -12 ; contrôle : $8 \times 6 = 48$ **À vous de jouer**

1°) Deux élèves ont des numéros de casier consécutifs, dont le produit vaut 210. Quels sont ces numéros?

2°) Une table rectangulaire a un périmètre de 26 dm et une aire de 42 dm² : quelles sont ses dimensions?

3°) Une fusée à eau est lancée depuis un balcon ; sa hauteur en mètres est $h(t) = -5t^2 + 30t + 35$ pour $t \geq 0$.
 Quelle hauteur maximale atteint-elle ? Au bout de combien de temps retombe-t-elle au sol ?

Réponses : 1°) $x^2 + x - 210 = 0$, $\Delta = 841 = 29^2$: casiers 14 et 15; 2°) $x^2 - 13x + 42 = 0$, $\Delta = 1$: 7 dm sur 6 dm; 3°) $\alpha = 3$ et $\beta = h(3) = 80$: 80 m au bout de 3 s; $t^2 - 6t - 7 = 0$ donne $t = 7$ (on rejette -1) : retour au sol au bout de 7 s.

► **À faire** : fiche d'exercices du chapitre, exercices 39 à 43.