

1^{re} spécialité — Le second degré

Fiche d'exercices du chapitre

I — Forme canonique

Exercice 1 : Lire, écrire et développer une forme canonique

1) Pour chaque fonction, donner a , α et β .

a) $f(x) = (x-3)^2 + 5$	d) $k(x) = -3(x-4)^2 - 1$
b) $g(x) = (x+2)^2 - 7$	e) $m(x) = (x+5)^2$
c) $h(x) = 2(x+1)^2 + 4$	f) $n(x) = -x^2 + 6$

2) Écrire la forme canonique du trinôme P pour chaque cas.

- $a = 1, \alpha = 2$ et $\beta = -3$
- $a = -2, \alpha = -1$ et $\beta = 5$
- $a = 3, \alpha = 4$ et $\beta = 0$
- $a = 5, \alpha = 0$ et $\beta = -1$

3) Développer $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $k(x)$ de la question 1.

Exercice 2 : Compléter un carré ($a = 1$)

Écrire chaque trinôme sous la forme $(x - \alpha)^2 + \beta$.

$A = x^2 + 8x - 3$	$D = x^2 + 5x + 2$
$B = x^2 - 6x + 2$	$E = x^2 - 12x + 35$
$C = x^2 - 3x + 1$	$F = x^2 - 9x$

Exercice 3 : Compléter un carré ($a \neq 1$)

Écrire chaque trinôme sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

$A = 2x^2 + 8x + 3$	$D = -x^2 + 5x - 4$
$B = -x^2 + 3x + 2$	$E = 2x^2 + 2x - 1$
$C = 4x^2 - 8x + 4$	$F = -2x^2 + 8x - 5$

II — Calcul de α et β , factorisation

Exercice 4 : Forme canonique par α et β

Pour chaque trinôme, calculer $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et β , écrire la forme canonique, puis la développer pour vérifier.

- $P(x) = x^2 - 6x + 1$
- $Q(x) = 3x^2 + 6x - 2$
- $R(x) = -x^2 - 4x - 9$

Exercice 5 : De la forme canonique à la factorisation

Écrire chaque trinôme sous forme canonique en calculant α et β . Le factoriser avec $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ quand c'est possible ; sinon, expliquer pourquoi il ne se factorise pas.

$A = x^2 - 4x - 5$	$C = 2x^2 + x - 3$
$B = x^2 + 4x + 7$	$D = -x^2 - 2x - 3$

Exercice 6 : Trois formes d'un même trinôme

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

- Calculer α et β , puis écrire la forme canonique de $f(x)$.
- En déduire une forme factorisée de $f(x)$.
- Développer cette forme factorisée pour vérifier.
- Choisir la forme la plus commode pour calculer $f(0)$, $f(3)$ et $f(1)$.

III — Équations du second degré

Exercice 7 : Factoriser plutôt que calculer Δ

Résoudre chaque équation en factorisant, sans discriminant.

1) $9x^2 - 4 = 0$	4) $x^2 - 5 = 0$
2) $x^2 - 6x = 0$	5) $(3x - 2)(x + 5) = 0$
3) $2x^2 - 18 = 0$	6) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Exercice 8 : Avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en calculant le discriminant.

- $x^2 + x - 12 = 0$
- $x^2 + 3x + 5 = 0$
- $-x^2 + 6x - 9 = 0$

- $t^2 - 4t - 21 = 0$
- $2 - y - 3y^2 = 0$
- $-2x^2 + 5x + 1 = 0$

Exercice 9 : Des racines carrées dans les coefficients

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $x^2 - 2\sqrt{5}x - 4 = 0$
- $\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$
- $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$
- $4x - x^2 - 5 = 0$
- $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$
- $(3x + 2)^2 + 1 = 0$

Exercice 10 : Une parabole et une droite

- Dans un même repère, tracer l'allure de la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 2x + 3$.
- Expliquer pourquoi les solutions de $x^2 - 2x - 3 = 0$ sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Combien cette équation a-t-elle de solutions ? Les lire.
- Résoudre $x^2 - 2x - 3 = 0$ par le calcul.

Exercice 11 : Un programme Python

La fonction racines renvoie la liste des solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

```
from math import sqrt

def racines(a, b, c):
    d = b*b - 4*a*c
    if d < 0:
        return []
    if d == 0:
        return [-b/(2*a)]
    r = sqrt(d)
    return [(-b - r)/(2*a), (-b + r)/(2*a)]
```

- Que représente la variable d ? Que renvoie la fonction selon son signe ?
- Saisir ce programme, puis le tester sur les six équations de l'exercice 8 : retrouve-t-on les résultats obtenus à la main ?
- Que se passe-t-il avec `racines(0, 3, -12)` ? Pourquoi ? Quelle est pourtant la solution de $3x - 12 = 0$?
- Comparer `racines(1, 6, 9)` et `racines(0.2, 1.2, 1.8)`. Le second trinôme vaut $0,2(x + 3)^2$: quelle réponse attendait-on ? Pourquoi un test d'égalité est-il fragile avec des nombres à virgule ?

IV — Factorisation du trinôme

Exercice 12 : Factoriser un trinôme

Écrire chaque trinôme comme un produit de facteurs.

- $f(x) = x^2 + 3x - 10$
- $g(x) = 3x^2 - 10x + 3$
- $h(x) = -2x^2 + 3x + 5$
- $k(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$

Exercice 13 : Factoriser, ou prouver que c'est impossible

Pour chaque trinôme, donner une forme factorisée ou démontrer qu'il ne se factorise pas.

$A = x^2 + 2x + 2$	$D = -x^2 + 4x - 7$
$B = x^2 + 8x + 16$	$E = 9x^2 + 12x + 4$
$C = 3x^2 - 5x + 2$	$F = 2x^2 + 3x + 1$

Exercice 14 : Simplifier un quotient

Donner l'ensemble de définition, factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier.

1) $A(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

$$2) B(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

V — Somme et produit des racines

Exercice 15 : Une racine connue (1)

- 1) Montrer que -2 est solution de $x^2 + 5x + 6 = 0$.
- 2) Donner la somme S et le produit P des racines.
- 3) En déduire l'autre solution, et la contrôler avec P .

Exercice 16 : Une racine connue (2)

- 1) Montrer que 3 est solution de $x^2 - 7x + 12 = 0$.
- 2) Donner la somme S et le produit P des racines.
- 3) En déduire l'autre solution, et la contrôler avec P .

Exercice 17 : Racine évidente, puis somme

Pour chaque équation, trouver une racine évidente parmi

$$1, -1, 2, -2, \dots \text{ puis l'autre racine avec la somme } S = -\frac{b}{a}.$$

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1) $x^2 - 6x + 5 = 0$ | 3) $7x^2 - 9x + 2 = 0$ |
| 2) $4x^2 + x - 5 = 0$ | 4) $3x^2 + 8x + 5 = 0$ |

Exercice 18 : Sans discriminant

Résoudre chaque équation sans calculer de discriminant : racine évidente, puis somme ou produit.

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| 1) $x^2 - 10x + 9 = 0$ | 4) $x^2 + 7x + 6 = 0$ |
| 2) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ | 5) $x^2 - 9x + 18 = 0$ |
| 3) $x^2 + 4x - 12 = 0$ | 6) $x^2 + x\sqrt{2} - 4 = 0$ |

Exercice 19 : Calculer sans résoudre

On note x_1 et x_2 les racines de $2x^2 - 9x + 4 = 0$, sans les calculer.

- 1) Justifier que ces racines existent, puis donner $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$.
- 2) Calculer $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ à l'aide de S et P .
- 3) Développer S^2 , puis en déduire $x_1^2 + x_2^2$.

Exercice 20 : Signe des racines

Sans calculer les racines, donner leur signe à l'aide de S et P .

- 1) $x^2 - 9x + 14 = 0$
- 2) $x^2 + 2x - 15 = 0$
- 3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$

VI — Signe du trinôme et inéquations

Exercice 21 : Tableau de signes

Dresser le tableau de signes de chaque trinôme.

A = $x^2 - 6x + 8$	C = $x^2 - 4x + 6$
B = $-3x^2 + 9x - 6$	D = $-x^2 - 4x - 4$

Exercice 22 : Inéquations du second degré

Résoudre :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ | 4) $x^2 + 3x + 4 < 0$ |
| 2) $x^2 + 2x - 24 < 0$ | 5) $2x^2 - 12x + 18 > 0$ |
| 3) $p^2 - p - 30 \leq 0$ | 6) $-3x^2 + 2x + 2 > 0$ |

Exercice 23 : Position d'une parabole et d'une droite

On note C_f la courbe de $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et D_g la droite d'équation $y = 4x + 2$.

- 1) Résoudre $f(x) = 4x + 2$. Que peut-on dire des points communs à C_f et D_g ?
- 2) Étudier le signe de $f(x) - (4x + 2)$.
- 3) En déduire la position de C_f par rapport à D_g .

VII — Représentation graphique

Exercice 24 : Sommet, racines, allure

Pour chaque fonction : orientation de la parabole, sommet $S(\alpha; \beta)$, racines éventuelles, puis allure de la courbe dans un repère.

A = $x^2 + 4x + 3$	C = $x^2 - 4x + 5$
B = $-x^2 + 4x - 3$	D = $-2x^2 - 4x$

Exercice 25 : Utiliser la symétrie

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- 1) Calculer α, β et les racines de f .
- 2) Calculer $f(0)$. Quel point de la parabole est le symétrique de $(0; f(0))$ par rapport à la droite $x = \alpha$? Le vérifier par un calcul.
- 3) Placer ces points dans un repère, puis tracer l'allure de la parabole.

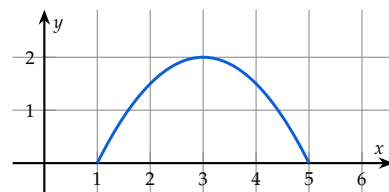
Exercice 26 : Retrouver un trinôme

Une parabole coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 ; son sommet est $S(1; -8)$.

- 1) Vérifier que l'abscisse du sommet est le milieu des racines.
- 2) Le trinôme s'écrit $a(x+1)(x-3)$. Trouver a à l'aide du sommet.
- 3) Écrire le trinôme sous forme développée, et contrôler avec le sommet.

Exercice 27 : Le jet d'une fontaine

Le jet d'eau d'une fontaine suit une parabole. Dans le repère ci-dessous, x est la distance horizontale (en m) et y la hauteur du jet au-dessus du bassin (en m). Cette parabole est la courbe d'un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

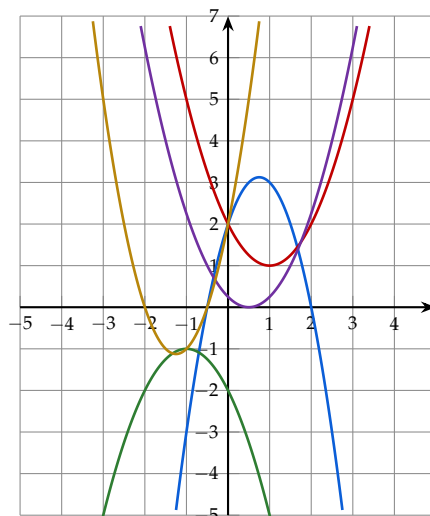


- 1) Lire les racines x_1 et x_2 de P . Que représentent-elles pour le jet ?
- 2) Lire les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet. Que représente β ?
- 3) Vérifier que α est le milieu de x_1 et x_2 .
- 4) Quel est le signe de a ? Justifier.

Exercice 28 : À chaque parabole sa fonction

Le graphique ci-dessous montre 5 paraboles $C_1, \dots, C_5$. Associer à chaque fonction sa parabole, en justifiant.

- $f_1(x) = -x^2 - 2x - 2$
- $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$
- $f_3(x) = 2x^2 + 5x + 2$
- $f_4(x) = -2x^2 + 3x + 2$
- $f_5(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$



C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
-------	-------	-------	-------	-------

VIII — Variations de la fonction trinôme

Exercice 29 : Variations et forme canonique

Dresser le tableau de variations de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$
- 2) $g(x) = -2(x+3)^2 + 4$
- 3) $h(x) = x(x+6)$

Exercice 30 : Variations par α et β

Pour chaque trinôme, calculer α et β , puis dresser son tableau de variations.

$$\begin{array}{l|l} A = x^2 + 6x + 7 & C = 3x^2 - 12x + 5 \\ B = -x^2 + 4x + 5 & D = -\frac{1}{2}x^2 - 2x \end{array}$$

Exercice 31 : Un maximum

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 10$.

- 1) Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
- 2) En déduire que $f(x) \leq 2$ pour tout réel x . Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = 2$?

Exercice 32 : Étude complète d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- 1) Trouver les racines de f , puis écrire $f(x)$ sous forme factorisée.
- 2) Calculer α et β , puis dresser le tableau de variations de f .
- 3) Vérifier que α est le milieu des deux racines.
- 4) Dresser le tableau de signes de f , puis tracer l'allure de sa courbe.

IX — Équations se ramenant au second degré

Exercice 33 : Développer, puis résoudre

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1) $(x+1)(x-4) = 6$
- 2) $(3x+1)^2 = 16$
- 3) $x(x-4) = -3$
- 4) $(2x+3)^2 = (x+3)^2$
- 5) $(x-3)^2 = x+3$
- 6) $(x+4)(x-4) = 6x+11$

Exercice 34 : Un seul quotient

Donner l'ensemble de définition, puis résoudre :

- 1) $\frac{12}{x} = x+1$
- 2) $\frac{6}{x-1} = x$
- 3) $\frac{x+10}{x} = x-2$
- 4) $x + \frac{8}{x} = 6$

Exercice 35 : Équations avec quotients

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} = 2x-5$
- 2) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x-3} = 1$
- 3) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3} = \frac{3}{2}$
- 4) $\frac{2x^2 + 9x + 10}{x+2} = x+3$

X — Inéquations se ramenant au second degré

Exercice 36 : Développer, puis résoudre

Résoudre :

- 1) $(x+1)(x+3) \leq 2x+6$
- 2) $(3x+1)^2 < (x+3)^2$
- 3) $x(x-4) \geq 5$
- 4) $(x+2)^2 > 9$

Exercice 37 : Signe d'un quotient

Donner l'ensemble de définition, puis résoudre :

- 1) $\frac{2x-6}{x+1} \leq 0$
- 2) $\frac{x^2-1}{x+2} \geq 0$
- 3) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+3} > 0$
- 4) $\frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0$

Exercice 38 : Tout dans un membre

Résoudre $\frac{x+2}{2-x} \geq 3x+1$.

On ne multipliera pas par un dénominateur dont on ignore le signe.

XI — Problèmes

Pour chaque problème : choisir l'inconnue et dire ce qu'elle représente, mettre en équation, résoudre, puis revenir à l'énoncé et répondre par une phrase.

Exercice 39 : Le nombre mystère

Le carré d'un nombre positif, diminué de son triple, vaut 40. Quel est ce nombre?

Exercice 40 : Une voile d'ombrage

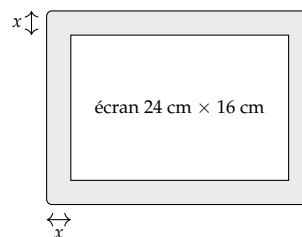
Une voile d'ombrage a la forme d'un triangle rectangle. L'un des côtés de l'angle droit mesure 2 m de plus que l'autre, et l'aire de la voile est de 12 m². Quelles sont les longueurs des côtés de l'angle droit?

Exercice 41 : Agrandir une photo

On agrandit une photo carrée en ajoutant 12 cm à son côté : son aire est alors multipliée par 4. Quel était le côté de la photo de départ?

Exercice 42 : La bordure d'une tablette

L'écran d'une tablette mesure 24 cm sur 16 cm. Il est entouré d'une bordure de largeur constante x . La face avant de la tablette a une aire de 560 cm².



Trouver la largeur x de la bordure.

Exercice 43 : Des vélos reconditionnés

Un atelier remet en état et vend x vélos électriques par mois, avec $0 \leq x \leq 40$. Son bénéfice mensuel, en euros, est

$$B(x) = -10x^2 + 400x - 3000$$

- 1) Calculer $B(5)$ et $B(12)$, et interpréter.
- 2) Résoudre $B(x) > 0$. Combien de vélos l'atelier doit-il vendre pour être bénéficiaire?
- 3) Pour combien de vélos vendus le bénéfice est-il maximal? Que vaut-il?